

# Lineare Transformation des $\mathbb{R}^3$

Abbildung des Raumes, die jedem Ur-Punkt  $P(x,y,z)$  einen Bildpunkt  $P'(u,v,w)$  zuordnet durch lineare Funktionen. z.B.:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y-2z \\ 2x+6y+4z \\ -x-2y \end{pmatrix}$$

Fragen dazu:

- Gibt es eine einfachere Darstellung (ggf. durch Änderung des Koordinatensystemes)
- Welche Punkte  $P$  werden einfach auf der Geraden  $OP$  verschoben (das wären dann Fixgeraden):  $P' = A \cdot P = k \cdot E \cdot P$  bzw.  $P - k \cdot E = 0$  bzw.  $\text{Det}(P - k \cdot E) = 0$
- Gibt es Fixpunkte  $P' = P$ ?
- Bleibt die Dimension des Ur-Raumes erhalten?

Charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & -2 \\ 2 & 6-k & 4 \\ -1 & -2 & -k \end{vmatrix} = -k^3 - 7k^2 - 16k + 12 = (3-k)(k-2)^2 = 0$$

Eigenwerte

$$k_1 = 3, k_2 = k_3 = 2$$

Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} x & -2y & -2z \\ 2x & 6y & 4z \\ -x & -2y & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x - 2y - 2z = 0 & \quad y + 2z = 0 & \quad x = -t \\ 2x + 3y + 4z = 0 & \Leftrightarrow -y - 2z = 0 & \Leftrightarrow y = 2t \\ -x - 2y - 3z = 0 & \quad -x - 2y - 3z = 0 & \quad z = -t \end{aligned} \Leftrightarrow EV_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & -2y & -2z \\ 2x & 6y & 4z \\ -x & -2y & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x - 2y - 2z = 0 & \quad x = -2s - 2t \\ 2x + 3y + 4z = 0 & \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 0 & \Leftrightarrow y = s \\ -x - 2y - 3z = 0 & \quad z = t \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$EV_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einige Begriffe aus der Theorie der Matrizen

## Reguläre Matrix

Determinante  $\neq 0$ , alle Zeilenvektoren und alle Spaltenvektoren linear unabhängig, die durch sie vermittelte lineare Abbildung ist bijektiv, alle Eigenwerte  $\neq 0$ , sie besitzt eine inverse Matrix

## Einheitsmatrix

$$E_n: a_{i,i} = 1, a_{i,k \neq i} = 0, \text{ Diagonalmatrix: } E_n: a_{i,i} \neq 0, a_{i,k \neq i} = 0$$

## Transponierte Matrix

$$A^T: a_{i,k} = a_{k,i}, \text{ ist; symmetrische Matrix: } A = A^T, a_{i,k} = a_{k,i}$$

Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.

## Inverse Matrix

$$A A^{-1} = E_n$$

## Normale Matrix

ist mit ihrer Transponierten vertauschbar:  $A A^T = A^T A$

Jede symmetrische Matrix ist normal

Alle normalen Matrizen haben ein vollständiges System linear unabhängiger orthogonaler

Eigenvektoren

### Orthogonale Matrix

$$A^T = A^{-1}$$

Zeilenvektoren und Spaltenvektoren sind orthonormal, die durch sie vermittelten Abbildungen sind die Kongruenzabbildungen

Jede orthogonale Matrix ist normal

### Ähnliche Matrizen

Es sei U eine beliebige reguläre Matrix

Dann nennt man die Matrizen A und  $D = U^{-1}AU$  ähnlich.

Sie haben dieselbe Determinante und dieselben Eigenwerte

### Diagonalisierbare Matrix

Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn es ein U gibt, so dass D eine Diagonalmatrix ist. Die Elemente der Hauptdiagonale sind dann die Eigenwerte, alle anderen sind =0.

Falls eine Matrix diagonalisierbar ist, sind die Spaltenvektoren von U die Eigenvektoren von A.

Es sind genau alle normalen Matrizen diagonalisierbar.

Sonderfall:  $k_1=0, k_2 \neq 1 \vee k_3 \neq 1$

Projektion + affine Transformation (vergleiche: Satz von Pohlke)

der erste Eigenvektor gibt die Projektionsrichtung an

Sonderfall Projektion:  $k_1=0, k_2=k_3=1$

der erste Eigenvektor gibt die Projektionsrichtung an, die beiden anderen spannen die Bildebene auf.

Beispiel: Militärriss

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+pz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom

$$k(k-1)^2=0$$

Eigenwerte  $k_1=0, k_2=k_3=1$

Eigenvektoren

$$EV_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Kollineation des $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2+9x_3 \\ -3x_1-6x_2-9x_3 \\ 2x_1-x_2+3x_3 \end{pmatrix}$$

Nimmt man homogene Koordinaten an, so ist

$$x' = \frac{x_1}{x_3} = \frac{3x_2+9x_3}{2x_1-x_2+3x_3}, y' = \frac{x_2}{x_3} = \frac{-3x_1-6x_2-9x_3}{2x_1-x_2+3x_3}$$

$$x' = \frac{3y+9}{2x-y+3}, y' = \frac{-3x-6y-9}{2x-y+3}$$

Umkehrabbildung:

$$x = \frac{-9x'-6y'+9}{5x'+2y'+3}, y = \frac{-3x'-6y'-9}{5x'+2y'+3}$$

Gleich sofort folgt: die Gerade  $2x-3y+3=0$  ist die Verschwindungsgerade, die Bilder aller ihrer Punkte sind Fernpunkte.

Und: die Bilder aller Fernpunkte liegen auf der Fluchtgeraden  $5x+2y+3=0$

Die Abbildung hat die Eigenwerte  $k_1=-3, k_2=6, k_3=-6$

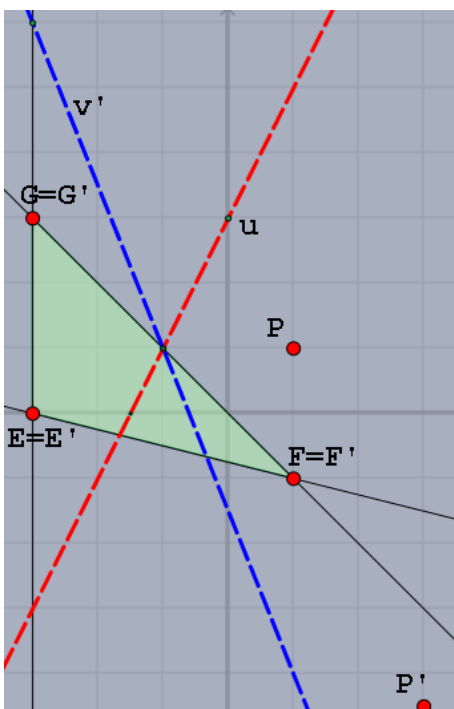
und die Eigenvektoren

$$EV_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ihre Bilder unter der Abbildung sind das -3 bzw. 6 bzw. -6-fache, was aber inhomogen jeweils denselben Punkt ergibt. Man hat also die Fixpunkte der Kollineation gefunden, nämlich

$$E = E' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, F = F' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, G = G' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Interessant ist vielleicht noch: auf der Fixgeraden EF ist F der Attraktor, auf EG ist es G. Auf FG gibt es ist F Attraktor für alle Punkte rechts von  $(F+G)/2$ , die Punkte links davon sind einer Involution unterworfen, sie pendeln hin und her bezüglich G. E ist ein Repeller. Der Orbit jedes sonstigen Punktes nähert sich der Fixgeraden FG, sein Schicksal hängt davon ab, ob rechts oder links von  $(F+G)/2$ .



Führt man die Kollineation  $n$ -Mal aus, so erhält man den Punkt

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{außerdem ist}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und daher strebt der}$$

Punkt  $P(r,s)$  schließlich zu auf

$$P_\infty = \begin{pmatrix} x = \frac{-s}{\frac{r}{3} + \frac{s}{3} + 1} \\ y = \frac{s}{\frac{r}{3} + \frac{s}{3} + 1} \end{pmatrix}$$

und alle liegen auf der Geraden  $x+y=0$

# Perspektive Kollineation

Beispiel:

$Z(0|0.5)$ , Verschwindungsgerade  $y=1$ , Kollineationsachse  $y=0$ .

Um den zu einem Ursprung  $P(x,y)$  gehörenden Bildpunkt zu bestimmen, verwendet man den Kollineationsstrahl  $PZ$  und eine Hilfsgerade  $h'$ :

$PZ$ : Anstieg  $\frac{y-0.5}{x}$ , Gleichung daher  $v-0.5 = \frac{y-0.5}{x} * u$

$h'$ : Anstieg  $\frac{0.5}{x}$ , Gleichung daher  $v = \frac{0.5}{x}(u-x)$

Das System hat die Lösung (inhomogen):

$$u = \frac{x}{1-y}, v = \frac{0.5y}{1-y}$$

und homogen wieder mit

$$u = \frac{u_1}{u_3}, v = \frac{u_2}{u_3}, x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{x_1}{x_3 - x_2}, \frac{u_2}{u_3} = \frac{0.5x_2}{x_3 - x_2}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0.5x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

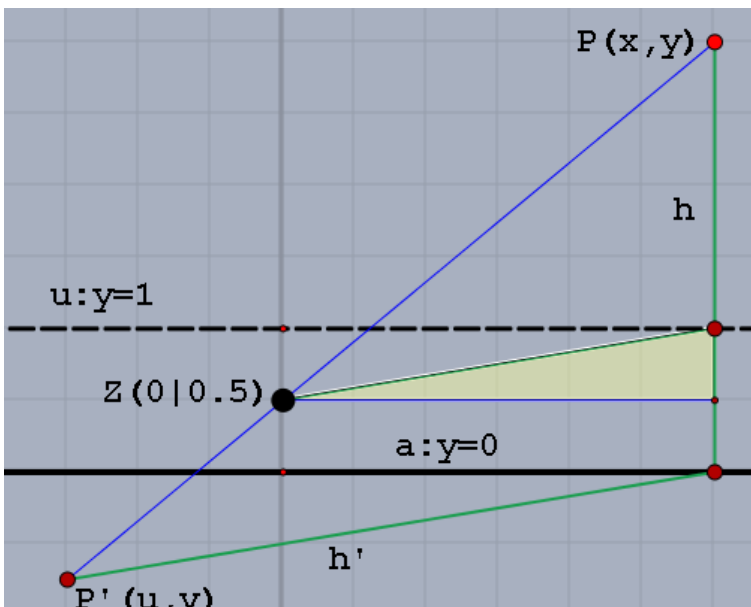
die Abbildungsmatrix ist daher

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

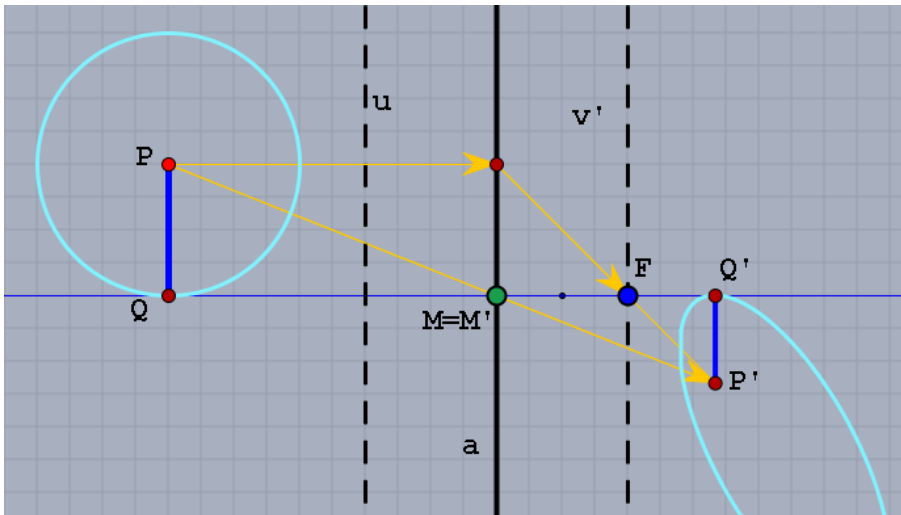
die Eigenvektoren sind  $k_1=0.5, k_2=k_3=1$  und die Eigenvektoren

$$EV_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Inhomogen gesprochen sind das der Reihe nach das Kollineationszentrum, der Fernpunkt der x-Achse und der Nullpunkt.



# Die Abbildung durch eine optische Linse



Eigenschaften:

- Strahlen durch die optische Mitte M der Linse a werden nicht verändert
- Strahlen parallel zur optischen Achse a werden durch den Brennpunkt F abgelenkt.

Nimmt man an:  $P(x,y)$ ,  $P'(u,v)$ ,  $M(0,0)$ ,  $F(f,0)$

so ergibt sich

$$u = \frac{f \cdot x}{x + f}, v = \frac{f \cdot y}{x + f}$$

und bezeichnet man: x als Gegenstandsweite g, u als Bildweite b und f als Brennweite, so erhält man die Linsengleichung:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

Die Gleichung beschreibt eine perspektive Kollineation mit dem Zentrum M und der Achse a. Da der Nenner für  $x = -f$  Null wird, ist diese Gerade die Verschwindungsgerade, die parallele Gerade durch den Brennpunkt ist umgekehrt das Bild der Ferngeraden.

# Abbildungen im Komplexen

Durch eine holomorphe (früher: reguläre) Funktion einer komplexen Variablen kann man ein Gebiet der  $z$ -Ebene auf ein Gebiet der  $w$ -Ebene abbilden:  $w=f(z)$ .

Das Argument  $z$  besteht dabei aus einem Real- und einem Imaginärteil:

$z: z=x+iy$ , ebenso

$w: w = u(x,y) + i*v(x,y)$  und

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i*v(x,y)$

Bei holomorphen Funktionen sind  $u(x,y)$  und  $v(x,y)$  zwar reelle Funktionen von  $x$  und  $y$ , können aber nicht beliebig gewählt werden, sie sind vielmehr verbunden über die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

## Beispiel:

ganze rationale Funktion  $w = f(z) = z + k = z + (a+i*b)$

Dabei handelt es sich um eine Parallelverschiebung:  $u(x,y)=x+a$ ,  $v(x,y)=y+b$

$$u_x=v_y=1, \quad u_y=-v_x=0$$

## Beispiel:

ganze rationale Funktion  $w = f(z) = k*z = (a+i*b) * z$

Es ist hier ausführlicher:

$$f(z) = (a+i*b)(x+i*y) = (a*x - b*y) + i*(a*y + b*x)$$

Also ist  $u(x,y) = a*x - b*y$  und  $v(x,y) = a*y + b*x$

$u_x = a$ ,  $u_y = -b$ ,  $v_x = b$ ,  $v_y = a$  und die Gleichungen sind erfüllt.

Dabei handelt es sich um eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel  $\arg(k)$  und dem Streckfaktor  $\text{abs}(k)$ .

$k$  reell ( $\arg(k)=0$  oder  $=\pi$ ): Streckung

$k$  unimodular ( $|k|=1$ ): Drehung.

## Beispiel

rational-gebrochene Funktionen  $w = 1/z$

Sie setzt sich zusammen aus einer Inversion am Einheitskreis und einer anschließenden Spiegelung an der  $x$ -Achse.

Die Parallelen zur  $x$ -Achse gehen in die Kreise eines parabolischen Büschels über, das die  $x$ -Achse im Nullpunkt berührt, die Parallelen zur  $y$ -Achse in das dazu orthogonale Büschel.

## Kreisverwandtschaften

Eine Abbildung von einer Fläche auf eine andere ist kreistreu, wenn Kreise auf Kreise abgebildet werden. Geraden in einer Ebene gelten dabei als Kreise durch einen unendlich fernen Punkt, der zu dieser Ebene hinzugezählt wird. Die Kreistreue bezieht sich nur auf die Kreislinie. Der Bildpunkt des Mittelpunktes des Urkreises ist im allgemeinen nicht mit dem Mittelpunkt des Bildkreises identisch.

# Holomorphe Funktionen und Konforme Abbildung

(nach Konrad Knopp, Elemente der Funktionentheorie, 1937)

$w = f(z)$  sei eine holomorphe Funktion, die eine Abbildung der  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene vermittelt. Es soll gezeigt werden, dass diese Abbildung konform ist.

Es sei  $k = p(t) + i \cdot q(t)$  eine Kurve der  $z$ -Ebene,  $a$  ein Punkt darauf und  $\langle z_n \rangle$  eine Folge von Punkten auf  $k$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

Bei Anwendung von  $f(z)$  geht die Punktfolge  $\langle z_n \rangle$  über in die Punktfolge  $\langle w_n \rangle = \langle f(z_n) \rangle$ , die gegen  $f(a)$  konvergiert. Da  $f(z)$  holomorph ist, existiert die 1. Ableitung in  $f(a)$  und kann durch folgenden Grenzprozess berechnet werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{w_n - f(a)}{z_n - a} \right) = f'(a)$$

Geht man zu den Argumenten über, so erhält man:

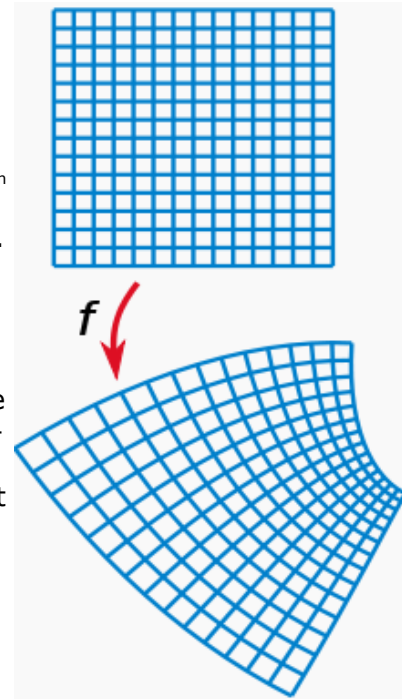
$$\arg(w_n - f(a)) - \arg(z_n - a) \rightarrow \arg(f'(a))$$

der zweite Ausdruck hat die Richtung der Sekante von  $a$  zu  $z_n$  und im Endeffekt die Richtung der Tangente in  $a$ , der erste sinngemäß für  $f(a)$  und  $w_n$  bzw. der Tangente von  $f(k)$  in  $f(a)$ . D.h. im Endeffekt:

Tangentenwinkel in  $f(a)$  =  
Tangentenwinkel in  $a$  + Argument von  $f'(a)$

d.h. in der  $w$ -Ebene ist das Argument der Tangente der Kurve um  $\arg(f'(a))$  größer als das Argument der Tangente in der  $z$ -Ebene.

Auch für eine zweite Kurve durch  $a$  und ihr Bild durch  $f(a)$  gilt das, so dass beide Kurven in der  $w$ -Ebene wieder denselben Winkel wie in der  $z$ -Ebene einschließen, allerdings um  $\arg(f'(a))$  weitergedreht.



Geht man zu den Beträgen über, so erhält man:

$$\frac{|w_n - f(a)|}{|z_n - a|} \rightarrow |f'(a)|$$

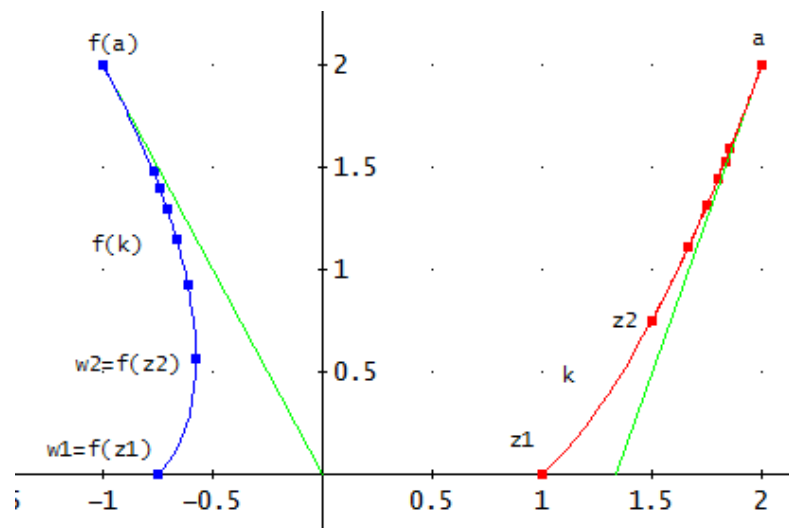
bzw.

$$|w_n - f(a)| \rightarrow |z_n - a| \cdot |f'(a)|$$

d.h. in der  $w$ -Ebene findet eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Faktor  $|f'(a)|$  statt.

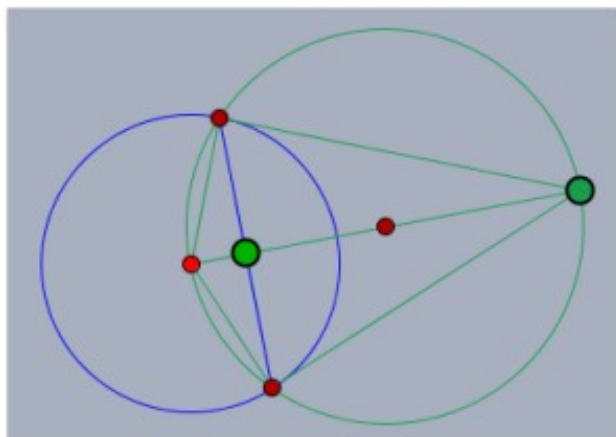
Beispiel:

Kurve:  $k(t) = t + i \cdot (t^2 - t)$ ,  $k'(t) = 1 + i \cdot (2t - 1)$   
 Punkt  $a$ :  $t=1$ :  $a=2+2i$ ,  $k'(a) = 1+i$ ,  $\arg(f'(a)) = \pi/4$   
 Abbildung:  $f(z) = z^2/4$ ,  $f(a) = -1+2 \cdot i$ ,  $f'(a) = 1+i$



# Inversion

Abbildungsgleichung ( $z'$ ... konjugiert komplexe Zahl zu  $z$ )  $w(z) = \frac{1}{z'}$



Gerade parallel zur reellen Achse  
(x-Parallele, rot)

$$z(t) := a * i + t$$

$$w(t) = \frac{t}{a^2 + t^2} + \frac{a * i}{a^2 + t^2} = \begin{pmatrix} \frac{t}{a^2 + t^2} \\ \frac{a}{a^2 + t^2} \end{pmatrix}$$

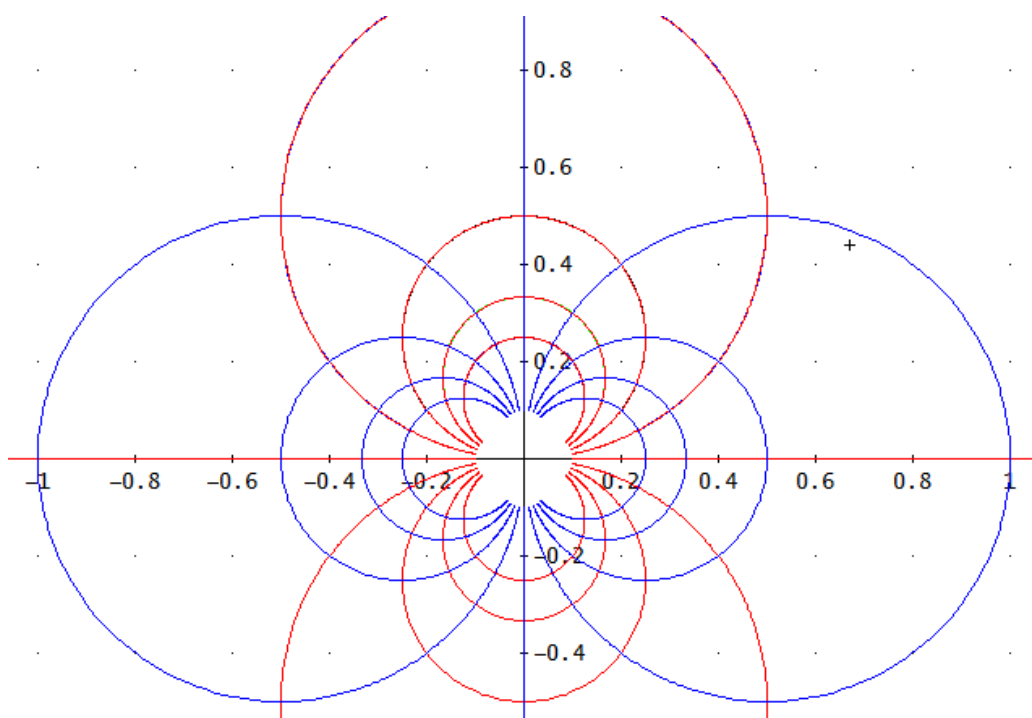
Kreise mit Mittelpunkt auf der imaginären Achse, durch O

Gerade parallel zur imaginären Achse (y-Parallele, blau)

$$z(t) := a + t * i$$

$$w(t) = \frac{a}{a^2 + t^2} + \frac{t * i}{a^2 + t^2} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + t^2} \\ \frac{t}{a^2 + t^2} \end{pmatrix}$$

Kreise mit Mittelpunkt auf der reellen Achse, durch O





# Die Möbius Transformation

ist eine Abbildung der komplexen Ebene, die durch einen linear-gebrochenen Term dargestellt wird

$$w(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Sie besitzt die Umkehrung

$$z(w) := \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Sie kann festgelegt werden durch drei Paare  $z_1 \Leftrightarrow w_1, z_2 \Leftrightarrow w_2, z_3 \Leftrightarrow w_3$  Ursprung-Bildpunkt.

Wegen der Doppelverhältnistreue  $DV(z, z_1, z_2, z_3) = DV(w, w_1, w_2, w_3)$

ist dann nämlich

$$\frac{z-z_2}{z-z_3} \cdot \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} = \frac{w-w_2}{w-w_3} \cdot \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}$$

## Eigenschaften:

- konform (winkeltreu)
- kreistreu (Kreise inkl. Geraden sind gemeint)
- doppelverhältnistreu
- zwei hintereinander ausgeführt Transformationen ergeben wieder eine MT, sie bilden eine Gruppe
- die inverse Lage zweier zu einem Kreis bleibt erhalten.

## Beispiel 1:

der Kreis  $|z|=2$  soll auf den Kreis  $|z+1|=1$  abgebildet werden, wobei

$$z_1 = -2 \Leftrightarrow w_1 = 0, z_2 = 0 \Leftrightarrow w_2 = i$$

der zu  $z_2$  bez. des ersten Kreises spiegelbildliche Punkt ist der Punkt  $z_3 = \infty$ , sein

Bildpunkt  $w_3$  muß daher spiegelbildlich zu  $w_2$  bez. des zweiten Kreises sein. Der zu  $w_2$  spiegelbildliche Punkt ist aber  $w_3 = -0.5 + 0.5i$

Damit kann man in die Dreipunkteformel einsetzen und erhält als Ergebnis:

$$w(z) = \frac{-z-2}{(1+i)z+2i}$$

## Beispiel 2:

$$w(z) = \frac{5z-(3+4i)}{(4-3i)z-(2+i)}$$

## Fixwerte:

$w(z)=z$  ergibt  $z=1$  und  $z=i$

**Fluchtpunkt** (Bild des Unendlichen):

$$f(\infty) = 0.8 + 0.6i$$

**Verschwindungspunkt** (Bildpunkt im Unendlichen):

$$0.2 + 0.4i$$

## Parallele zur x-Achse und zur y-Achse

Sie gehen alle durch das Unendliche, daher müssen ihre Bilder Kreise sein, untereinander orthogonal sein und durch den Fluchtpunkt gehen. Sie bilden zwei rechtwinkelige parabolische Kreisbüschel.

Besonderheiten:

die x- und die y-Parallele durch den Verschwindungspunkt gehen in Gerade über.

## Kreise um O, Radien durch O

Die Radien gehen alle durch O und Unendlich, die ihnen entsprechenden Kreise müssen also durch das Bild von O und den Verschwindungspunkt gehen. Sie bilden also ein elliptisches Kreisbüschel (reelle Grundpunkte).

Die Kreise stehen normal zu den Radien, daher müssen ihre Bilder das zum vorigen orthogonale hyperbolische Kreisbüschel bilden.

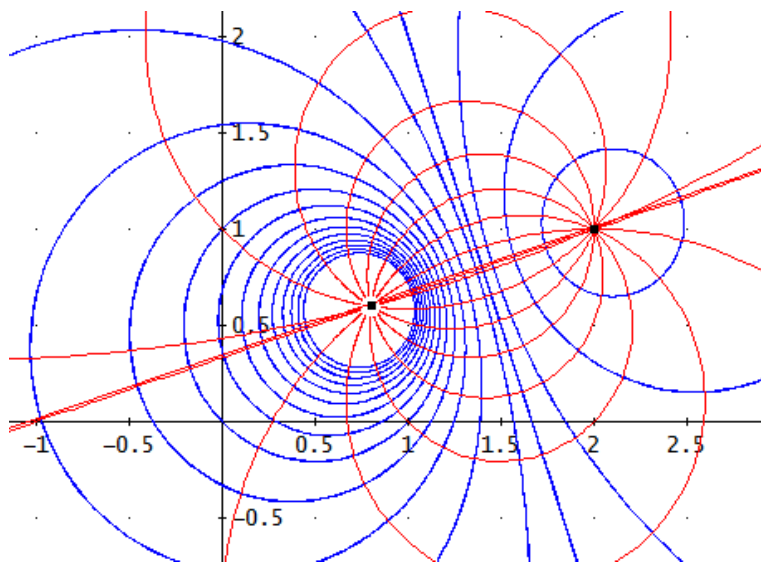
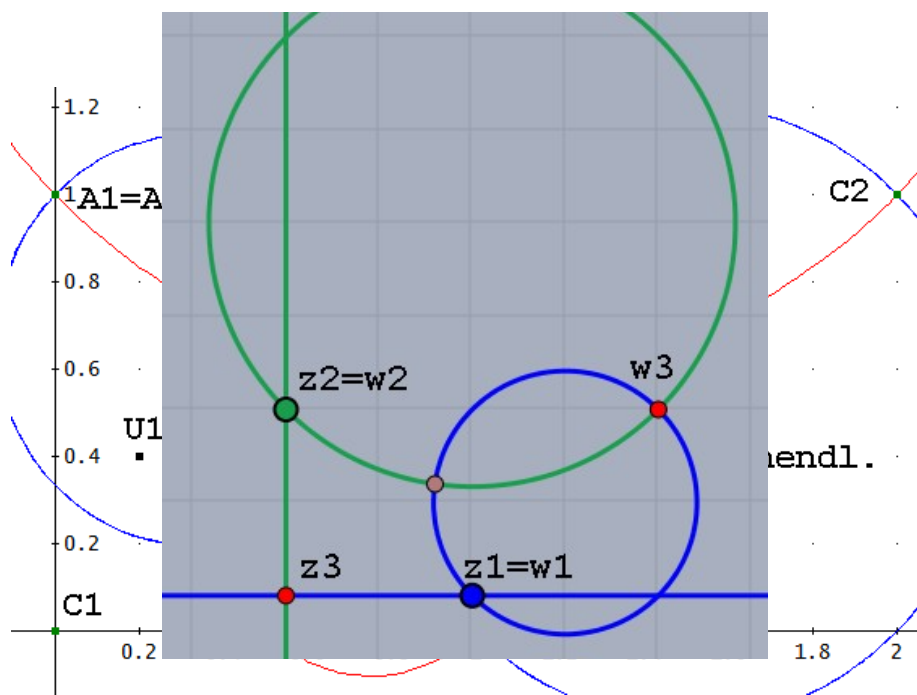
Besonderheiten dabei:

der Kreis und der Radius durch den Verschwindungspunkt werden zu einer Geraden

## Konstruktion:

In Cinderella 2-0 werden die Möbius Transformationen bereitgestellt, Modi  $\Rightarrow$  Transformation  $\Rightarrow$  Möbius Transformation. Man benötigt dazu drei (vorher eingezeichnete) Paare Ursprung - Bildpunkt, hier etwa

$$z_1 = w_1 = 1, z_2 = w_2 = i, z_3 = 0, w_3 = 2 + i$$



# Die Abbildung $w=z^2$

Gerade parallel zur reellen Achse (x-Parallele, rot)

$$u(t) := a \cdot i + t$$

$$u(t)^2 = t^2 - a^2 + 2at \cdot i = \begin{pmatrix} t^2 - a^2 \\ 2at \end{pmatrix}$$

Parabel mit Achse x, nach rechts offen, Scheitel  $[a^2, 0]$ , Brennpunkt in O

Schnittpunkte mit imaginärer Achse  $[0, \pm 2 \cdot a^2]$ , Winkel mit imaginärer Achse  $45^\circ$

Gerade parallel zur imaginären Achse (y-Parallele, blau)

$$v(t) := a + t \cdot i$$

$$v(t)^2 = a^2 - t^2 + 2at \cdot i = \begin{pmatrix} a^2 - t^2 \\ 2at \end{pmatrix}$$

Parabel mit Achse x, nach links offen, Scheitel  $[a^2, 0]$ , Brennpunkt in O

Schnittpunkte mit imaginärer Achse  $[0, \pm 2 \cdot a^2]$ , Winkel mit imaginärer Achse  $45^\circ$

Allgemeine Gerade

$$w(t) := a + t \cdot (1 + k \cdot i), \text{ Achsenabschnitte } a, -ak$$

$k=1$ : Parabel mit Achse y, nach oben offen, Scheitel  $[a^2/2, 0]$ ,

Schnittpunkte mit reeller Achse  $[\pm a^2, 0^*]$

$k=-1$ : Parabel mit Achse y, nach unten offen, Scheitel  $[-a^2/2, 0]$ ,

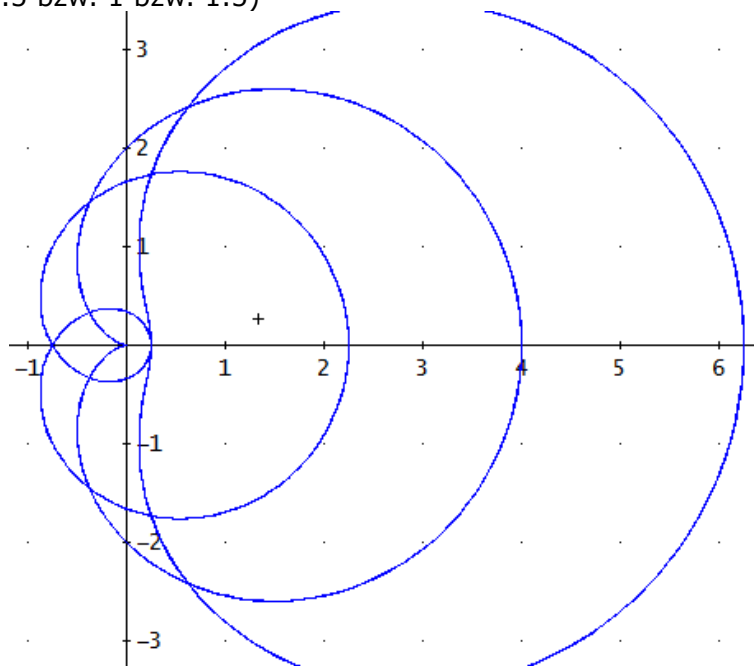
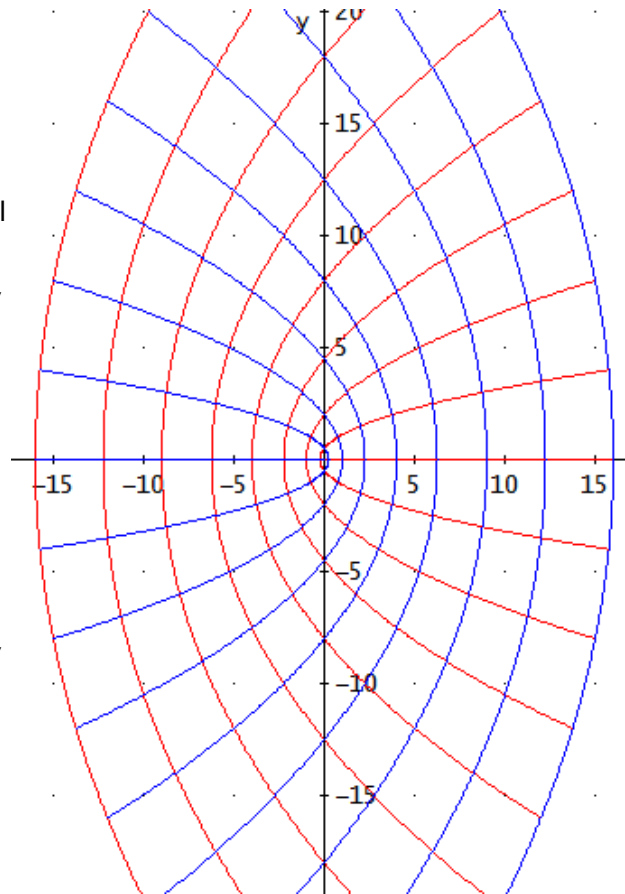
Schnittpunkte mit reeller Achse  $[\pm a^2, 0^*]$

sonst: schräg liegende Parabel, Achsenrichtung  $2k/(1-k^2)$

Schnittpunkte mit reeller Achse  $[a^2, 0], [-a^2k^2, 0]$

Bild eines Kreises: Pascal-Schnecken

(hier:  $r=1, M=(0|0.5 \text{ bzw. } 1 \text{ bzw. } 1.5)$ )

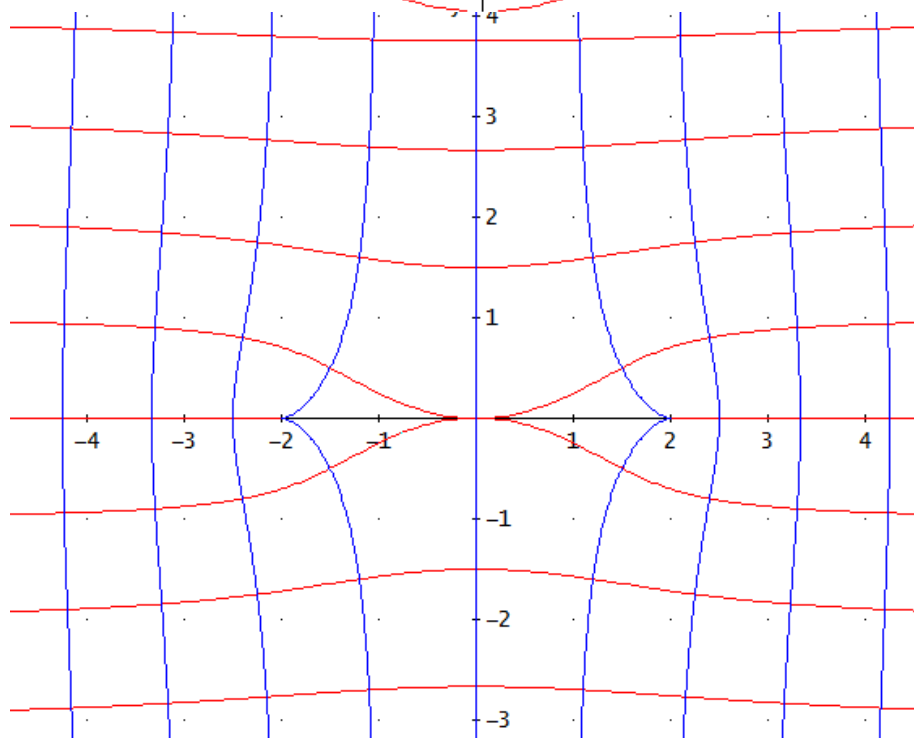
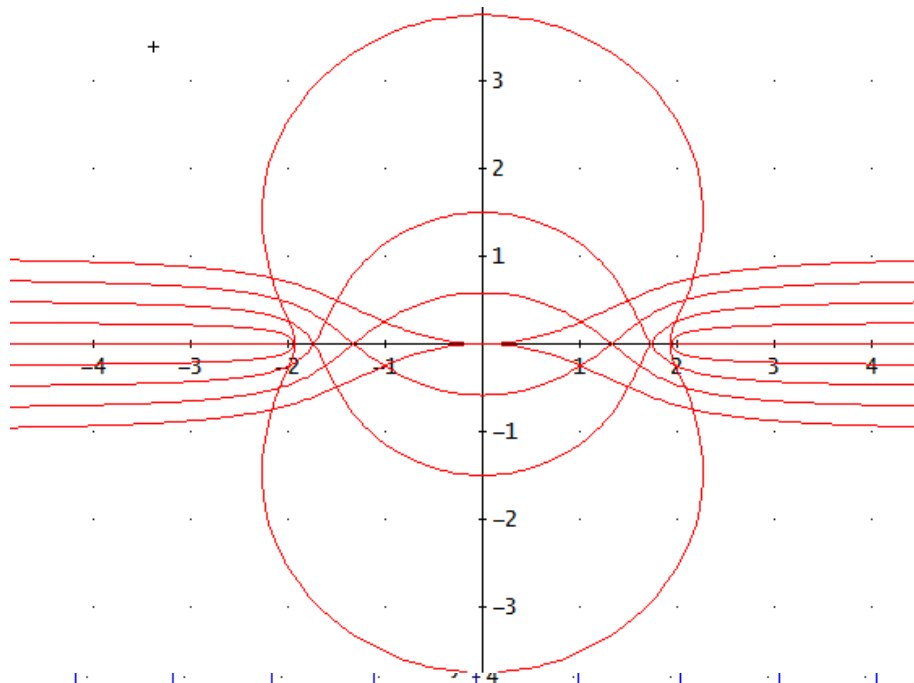
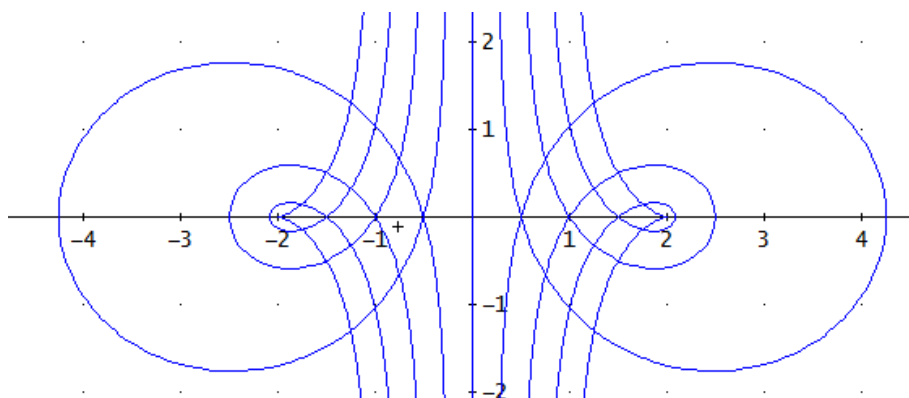


# Die Schukowski-Transformation (Жуковский)

$$w(z) = z + \frac{1}{z}$$

Bilder der Parallelen zur reellen (rot) bzw. zur imaginären (blau) Achse,

- zuerst im Bereich der  $\text{abs}(\text{Re}(z)) < 1$
- bzw  $\text{abs}(\text{Im}(z)) < 1$  und
- dann im Bereich  $\text{abs}(\text{Re}(z)) > 1$  bzw  $\text{abs}(\text{Im}(z)) > 1$



Bilder der Radien und der konzentrischen Kreise um O:  
 Konfokale Hyperbeln und Ellipsen mit den gemeinsamen Brennpunkten  $(-2|0)$ ,  $(2|0)$

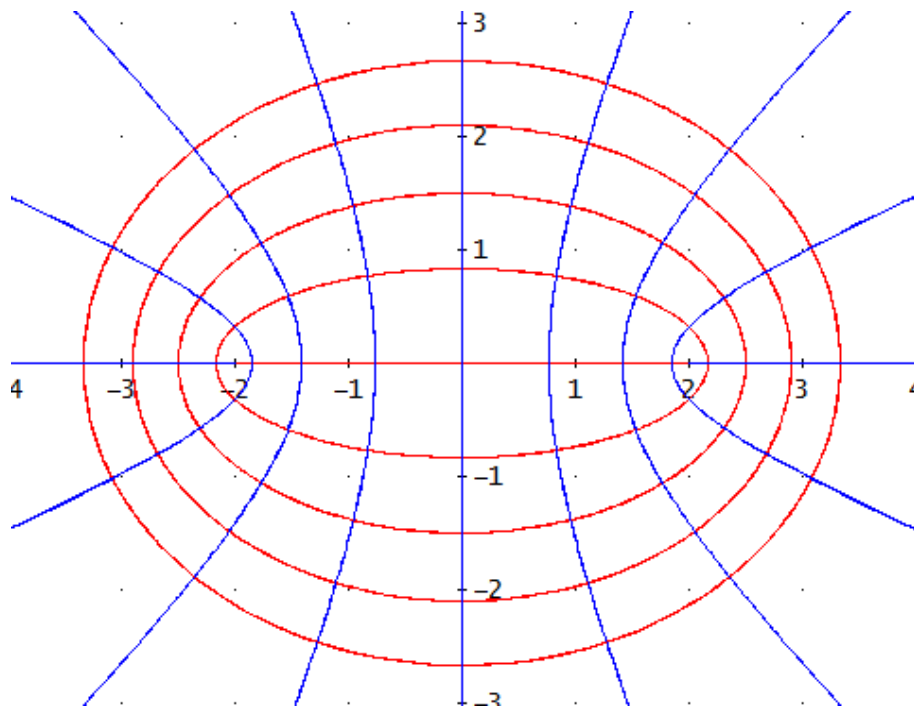
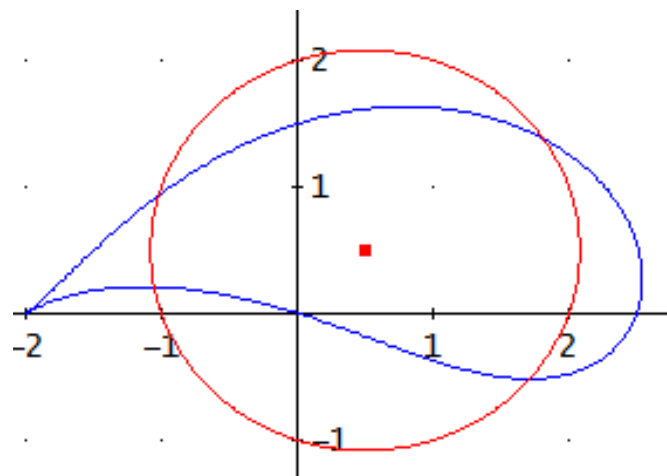
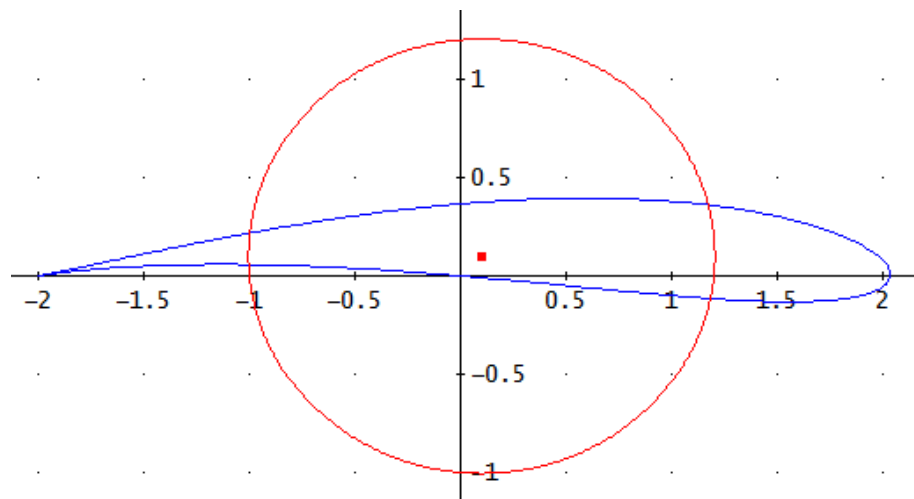


Bild eines Kreises mit  $M=0.1+0.1i$  und  $r=\sqrt{0.82}$  bzw.  $M=0.5+0.5i$  und  $r=\sqrt{2.5}$   
 (Tragflügel eines Flugzeuges). Spitzen erhält man, wenn der Kreis durch 1 oder -1 geht



# Flächenverzerrung, Längenverzerrung .

## Beispiel:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0.5y \\ 1.5y \end{pmatrix}$$

Sie hat die Eigenwerte  $k_1=1, k_2=1.5$  und die Eigenvektoren  $EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

weitere ist  $\begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{vmatrix} = 1.5$

Die Fläche eines von  $EV_1, EV_2$  gebildeten Parallelogrammes wird wegen  $k_1=1, k_2=1.5$  ver-1.5-facht (allgemein ver-  $k_1 * k_2 = \text{Det}(A)$  facht).

Betrachtet man nun die Punkte des (rot gezeichneten) Einheitskreises der x-y-Ebene,  $P(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ , so bilden ihre Bildpunkte  $P'(t) = A * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 0.5 \sin(t) \\ 1.5 \sin(t) \end{pmatrix}$

eine Ellipse, die **Tissot'sche Indikatrix**.

Jedes rechtwinkelige Durchmesserpaar des Kreises wird auf ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse abgebildet, eines davon auf die Achsen, die Durchmesser mit der größten bzw. kleinsten Längenverzerrung (**Hauptverzerrungsrichtungen**)

Berechnung:

$$Lg(t) = \left( A * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right)^2 = \left( \begin{pmatrix} \cos(t) - 0.5 \sin(t) \\ 1.5 \sin(t) \end{pmatrix} \right)^2 = 1.5 \sin^2(t) - \sin(t) \cos(t) + 1$$

$$Lg'(t) = -2 \cos^2(t) + 3 \sin(t) \cos(t) + 1$$

$Lg'(t)=0$  ergibt

$$t_1 = 0.2940013017, t_2 = 1.864797628 = t_1 + \pi/2$$

$$HS = \begin{pmatrix} 0.8121999522 \\ 0.4346762229 \end{pmatrix}, NS = \begin{pmatrix} -0.7683301614 \\ 1.435638039 \end{pmatrix}$$

und

$$HA = 1.628308267, NA = 0.9212014877, \text{ und } HA * NA = 1.5$$

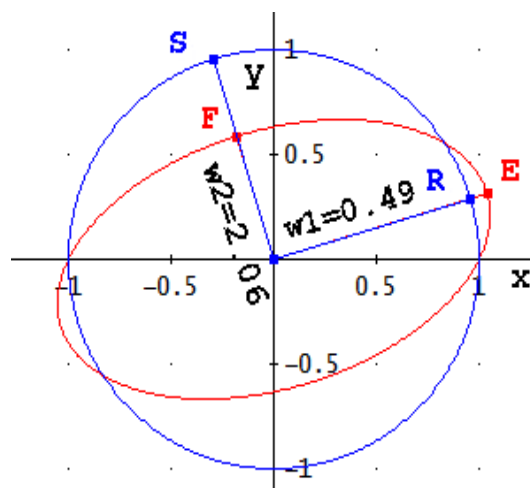
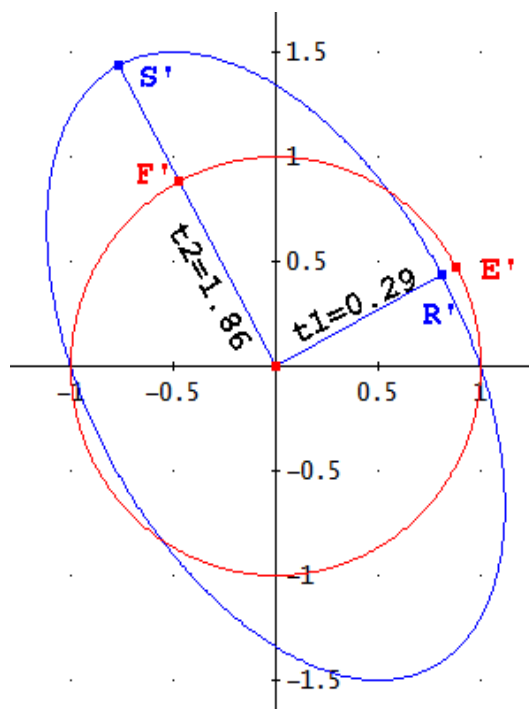
Die zu dieser Abbildung Inverse wird bewerkstelligt durch die Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ die Abbildungsgleichungen sind}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{v}{3} \\ \frac{2v}{3} \end{pmatrix}$$

Nun wird wieder der (rot gezeichnete) Einheitskreis der u-v-Ebene betrachtet und mit der inversen Abbildung zurück in die x-y-Ebene abgebildet:

$$A^{-1} * \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w) + \frac{\sin(w)}{3} \\ \frac{2 \sin(w)}{3} \end{pmatrix}$$



Berechnet man wieder die Länge der Durchmesser, so ergibt sicherlich

$$Lg(w) = \frac{4 \cos^2(t)}{9} + \frac{2 \sin(w) * \cos(w)}{3} + \frac{5}{9}$$

$$Lg'(w) = \frac{4 \cos^2(w)}{3} - \frac{8 \sin(w) * \cos(w)}{9} - \frac{2}{3}$$

$L'(t)=0$  ergibt

$$w_1 = 0.4913968616, w_2 = 2.062193188 = t_1 + \pi/2$$

$$HS = \begin{pmatrix} 1.038960573 \\ 0.3145719503 \end{pmatrix}, NS = \begin{pmatrix} -0.1779663922 \\ 0.5877830659 \end{pmatrix}$$

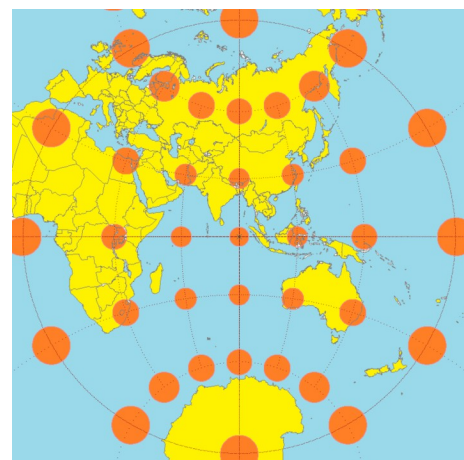
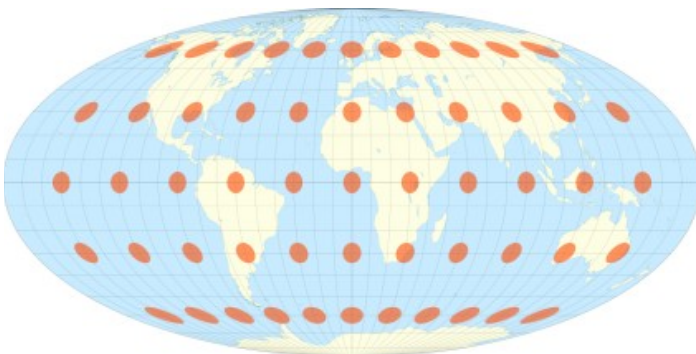
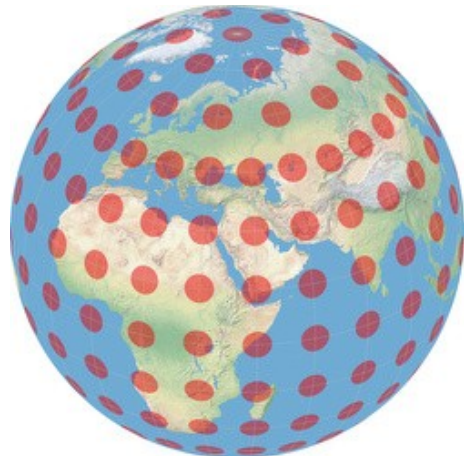
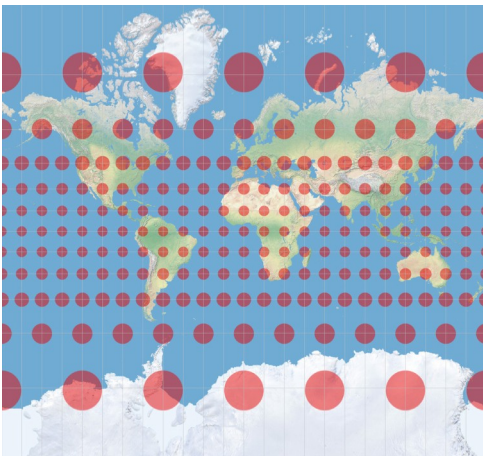
Hauptachse = 1.085538845, Nebenachse = 0.6141343251

Das ist die Tissot'sche Indikatrix für die Umkehrabbildung. Beide haben dasselbe Achsenverhältnis.

Hat das Produkt der Hauptverzerrungen überall den Wert 1, so ist die Abbildung **flächentreu**. Das ist dann der Fall, wenn **Det(A)=1** ist.

Ist die Indikatrix ein Kreis, so wird in jede Richtung gleich verzerrt, die Abbildung ist konform (eine Ähnlichkeit)

Im Folgenden eine Anzahl von Tissot'schen Indikatrizen für diverse Kartenprojektionen: Mercator-Projektion (konform), orthographische Projektion, Entwurf von Mollweide (flächentreu), äquatorständige stereographische Projektion (konform).



# Jacobi Matrix

## Allgemein:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung:

Darstellung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes  $x=a$  mit Hilfe der Taylor Reihe vom Grad 1:  $f(a+dx)=f(a)+f'(a)*dx$ , mit  $dx$  als Variabler. Man hat also die Gleichung der Tangente. Der Grad 1 reicht für viele Berechnungen, z.B. für Bogenlänge und Flächeninhalt, nicht aber für die Krümmung.

Das Rechteck mit den Eckpunkten  $P(x,y)$ - $Q(x+dx,y)$ - $R(x+dx,y+dy)$ - $S(x,y+dy)$  mit der Fläche  $F=dx*dy$  wird abgebildet auf das Parallelogramm

$$P' \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}, Q' \begin{pmatrix} f(x+dx, y) \\ g(x+dx, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) + f_x(x, y) * dx \\ g(x, y) + g_x(x, y) * dx \end{pmatrix}, S' \begin{pmatrix} f(x, y+dy) \\ g(x, y+dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) + f_y(x, y) * dy \\ g(x, y) + g_y(x, y) * dy \end{pmatrix}$$

mit den Seitenvektoren

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} f_x(x, y) * dx \\ g_x(x, y) * dx \end{pmatrix}, \overrightarrow{P'S'} = \begin{pmatrix} f_y(x, y) * dy \\ g_y(x, y) * dy \end{pmatrix}$$

und dem Flächeninhalt

$$FL' = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} dx * dy = (f_x * g_y - f_y * g_x) dx * dy$$

Die Determinante(bzw. ihre Matrix) heißen **Jacobi- Determinante (-Matrix)**, sie geben die Flächenverzerrung an.

Hat sie den Wert =1, so ist die Abbildung flächentreu.

Dort wo die Flächen nur „irgendwie“ verzerrt werden, verhält sich die Abbildung sozusagen relativ brav, und sie kann auch umgekehrt werden.

Also:

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 1 \Leftrightarrow \text{flächentreu} \quad \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \text{umkehrbar}$$

Die Parallelen zur x-Achse  $y=q$  gehen in die Kurvenschar  $\begin{pmatrix} f(x, q) \\ g(x, q) \end{pmatrix}$  über, der

Kurvenparameter ist  $x$  (allein), sie können mit den  $q$ -Werten durchnummeriert werden. Je zwei davon können keinen Schnittpunkt haben, sie überdecken die Ebene schlicht.

Die Parallelen zur x-Achse  $x=p$  gehen in die Kurvenschar  $\begin{pmatrix} f(p, y) \\ g(p, y) \end{pmatrix}$  über, der

Kurvenparameter ist  $y$  (allein), sie können mit den  $p$ -Werten durchnummeriert werden. Je zwei davon können keinen Schnittpunkt haben, sie überdecken die Ebene ebenfalls schlicht.

Zwei dieser Kurven schneiden einander rechtwinkelig, wenn

$$\overrightarrow{P'Q'} * \overrightarrow{P'R'} = f_x f_y + g_x g_y = 0$$

Sollen sie überall rechtwinkelig sein, muss die Jacobi Matrix orthogonal sein.

(□)



# Konforme Affinitäten

Es sei eine Affinität gegeben durch:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A*x + B*y \\ C*x + D*y \end{pmatrix}$$

Ein von O ausgehende Gerade soll mit der x-Achse den Winkel  $\varepsilon$ , ihre Bildgerade durch O' soll mit der u-Achse den Winkel  $\varphi$  bilden. Wenn die Affinität winkeltreu sein soll, dürfen sich die beiden nur um einen (von der konkreten Lage der Ausgangsgeraden unabhängigen) konstanten Winkel  $\gamma$  unterscheiden.

$$\tan \varepsilon = \frac{y}{x}, \tan \varphi = \frac{v}{u} = \frac{C*x + D*y}{A*x + B*y} = \frac{C + D*\left(\frac{y}{x}\right)}{A + B*\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon}$$

$$\varphi = \varepsilon + \gamma, \tan(\varepsilon + \gamma) = \frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon + \tan \gamma}{1 - \tan \varepsilon * \tan \gamma} = \frac{\sin \gamma + \cos \gamma * \tan \varepsilon}{\cos \gamma - \sin \gamma * \tan \varepsilon}$$

Setzt man zur Bestimmung von  $\gamma$  nun  $\gamma=0$  (Gerade waagrecht), dann ist auch  $\varepsilon=0$  und

$$\tan \gamma = \frac{C}{A}, \sin \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}, \cos \gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}}$$

Das wird eingesetzt in

$$\frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon} = \frac{\sin \gamma + \cos \gamma * \tan \varepsilon}{\cos \gamma - \sin \gamma * \tan \varepsilon} \quad \text{und ergibt}$$

$$\frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon} = \frac{C + A*\tan \varepsilon}{A - C*\tan \varepsilon}$$

Multipliziert man aus, so erhält man ein quadratischen Ausdruck in  $\tan \varepsilon$  (ohne konstantem Glied), der identisch verschwinden muss:

$$\tan^2 \varepsilon * (A*B + C*D) + \tan \varepsilon * (A^2 - A*D + C^2 - B*C) = 0$$

Die Bedingungen dafür, dass die Affinität winkeltreu ist, lauten daher:

$$A*B + C*D = 0$$

$$A^2 + C^2 = A*D - B*C$$

C und D werden ausgedrückt durch A und B:

Aus der ersten Gleichung:  $C = \frac{-A*B}{D}$  wird eingesetzt in die zweite Gleichung, das ergibt

nach mehreren Vereinfachungen  $D=A$  und zurück dann  $C=-B$

und die Abbildungsgleichung der Affinität ist (mit deutlicher Anspielung auf eine Drehung)

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A*x + B*y \\ -B*x + A*y \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix könnte man auch so schreiben:

$$\frac{\begin{pmatrix} A & B \\ \sqrt{A^2 + B^2} & \sqrt{A^2 + B^2} \\ -B & A \\ \sqrt{A^2 + B^2} & \sqrt{A^2 + B^2} \end{pmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

d.h. es liegt eine Drehung mit einer zentrischen Ähnlichkeit vor.  $\sqrt{A^2 + B^2}$

# Die berührende Affinität einer Abbildung

Gegeben sei eine Abbildung der x-y-Ebene auf sich durch:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

Es wird das Verhalten der Abbildung rund um P' untersucht.

Ein variierender Punkt Q in der Gegend von P soll die Koordinaten  $Q = P + (dx \mid dy) = (x+dx \mid y+dy)$  haben.

Dann ist

$$Q' = \begin{pmatrix} f(x+dx, y+dy) \\ g(x+dx, y+dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) + f_x(x, y) * dx + f_y(x, y) * dy \\ g(x, y) + g_x(x, y) * dx + g_y(x, y) * dy \end{pmatrix} = P' + \begin{pmatrix} f_x(x, y) * dx + f_y(x, y) * dy \\ g_x(x, y) * dx + g_y(x, y) * dy \end{pmatrix}$$

Das Koordinatensystem der „gestrichenen“ Punkte denkt man sich nach P' verlegt, das Bild von Q ist dann

$$Q' = P' + \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P' + \begin{pmatrix} f_x * dx + f_y * dy \\ g_x * dx + g_y * dy \end{pmatrix} = P' + \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, du = f_x * dx + f_y * dy, dv = g_x * dx + g_y * dy$$

$$du = f_x * dx + f_y * dy, dv = g_x * dx + g_y * dy$$

d.h. in der Umgebung eines Punktes ist die (beliebige) Abbildung eine Affinität, die Abbildungsmatrix ist die Jacobi-Matrix (schon wieder).

## Beispiel:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad \text{JacobiMatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

für  $P(2 \mid 1)$  und  $P'(3 \mid 2)$  ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

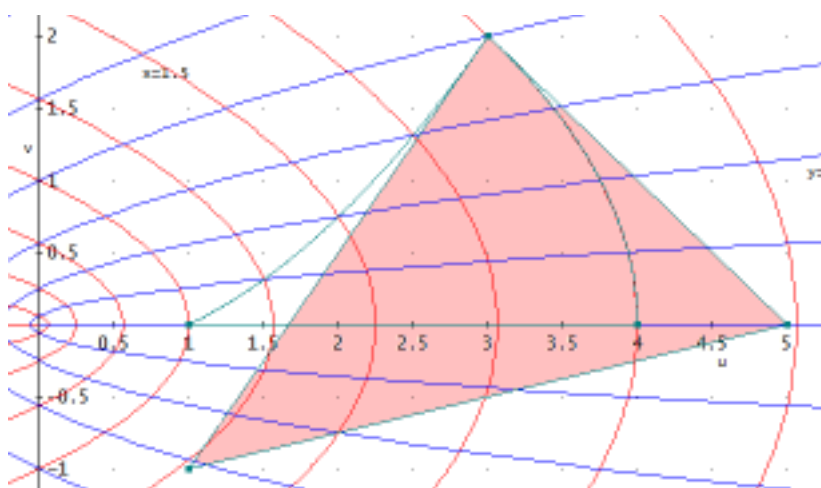
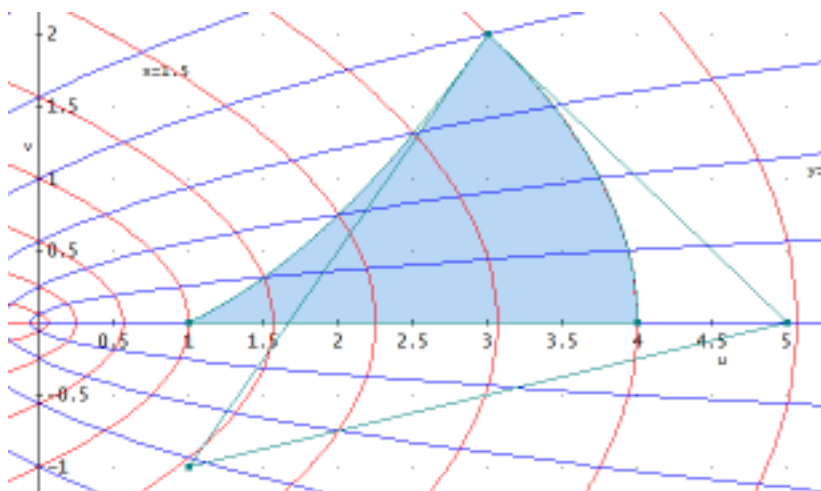
Betrachtet man das Dreieck P, Q(2 | 0), R(1 | 0) erhält man:

$P', Q'(4 \mid 0), R'=R$  bzw. für

Q:  $dx=0, dy=-1, Q'' = P' + (2 \mid -2) = (5 \mid 0)$  und für

R:  $dx=-1, dy=-1, R'' = P' + (-2 \mid -3) = (1 \mid -1)$

und folgende Bilder (unter der originalen Abbildung bzw. unter der berührenden Affinität):



# Konforme Abbildungen

Konform oder winkeltreu ist eine (beliebige) Abbildung dann, wenn der Winkel zweier Kurven im Ausgangssystem (x-y) **IMMER** derselbe ist wie im Bildsystem (u-v).

Die beliebige Abbildung kann man ersetzen durch die berührende Affinität, da im betrachteten Punkt die „echte“ Bildkurve die lineare Approximation berührt.

Wir verwenden also statt des Originales

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

die lineare Vereinfachung

$$P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x * x + f_y * y \\ g_x * x + g_y * y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, u = f_x * x + f_y * y, v = g_x * x + g_y * y$$

Oben wurde nachgewiesen, dass die Affinität

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A * x + B * y \\ C * x + D * y \end{pmatrix} \text{ genau dann konform ist, wenn gilt}$$

$A = D, B = -C$ , also wenn der Fall ist:

$$f_x = g_y \wedge f_y = -g_x$$

Das sind die aus der Funktionentheorie bekannten Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

Im Beispiel oben wurde verwendet:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$g(x, y) = xy$$

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = -2y$$

$$g_x(x, y) = y, \quad g_y(x, y) = x$$

Die Abbildung ist nicht konform.

Ersetzt man  $g(x, y)$  durch  $g(x, y) = 2xy$ , so ist sie konform

# Zylinderperspektive

Bei der Linearperspektive wird auf eine Ebene projiziert, was zu starken Randverzerrungen führt: in Richtung zum Fluchtpunkt werden die Objekte immer kleiner, was mit dem normalen Sehen gut übereinstimmt, in der Gegenrichtung aber immer größer, was sehr unschön wirkt. Bei der Zylinderprojektion wird als Projektionsfläche ein (Halb-) Drehzylinder, Radius  $r(=1)$ , Achse  $z$ , Höhe unbegrenzt, verwendet und als Projektionszentrum  $Z$  ein Achsenpunkt des Zylinders. Bei dieser Projektion werden seitlich gelegene Teile des Objektes je nach Entfernung kleiner, und zwar auf beiden Seiten. Abnormalien in der Höhe werden aber nicht beseitigt. Man kann verschiedene Aufstellungen wählen, wie bei der Linear-Perspektive nach hinten projizieren und dann in die hintere Tangentialebene abwickeln, oder nach vorne und in die vordere Tangentialebene abwickeln.

$Z(0,0,h)$  Der Zylinder wird anschließend in die Ebene vordere Tangentialebene  $x=1$  abgewickelt  
 Abmessungen des Bildes: Streifen mit der Breite  $r\pi$ .

Abbildungsgleichungen:

Um sie zu erhalten, verbindet man das Zentrum  $Z(0,0,h)$  mit dem Ursprung  $P(x,y,z)$  und schneidet diese Gerade mit dem Zylinder.

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow P^c = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), v = h + \frac{z-h}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

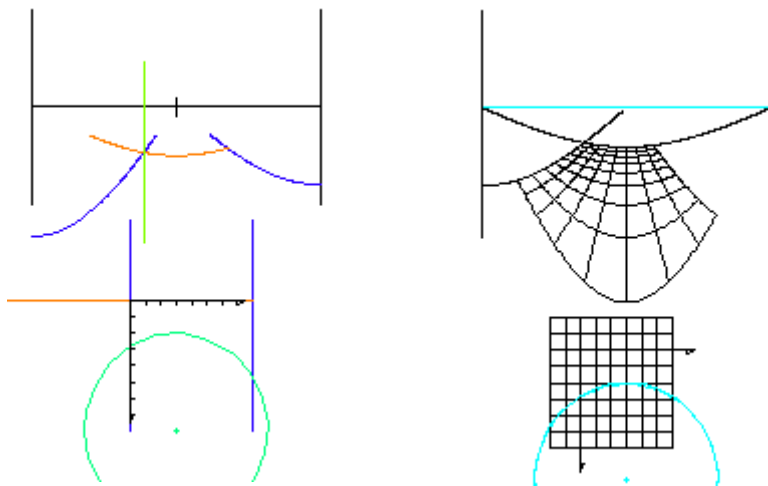
## Die Horizonte

Die Bilder der Fernpunkte aller waagrechten Geraden liegen auf dem waagrechten Horizont in der Höhe  $z=h$ .

Die Bilder der Fernpunkte aller Geraden  $\parallel$  zur  $y$ - $z$ -Ebene liegen auf zwei Parallelen Geraden

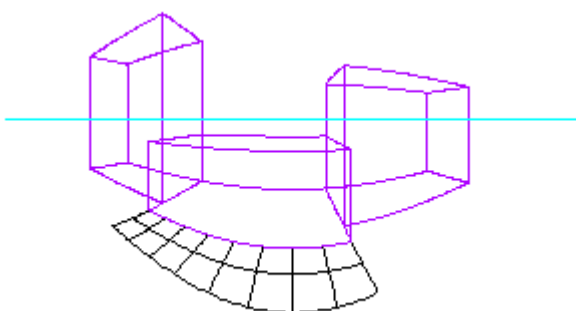
$$u = \pm \pi/2$$

Fluchtpunkt der  $x$ -Achse:  $Z''$ , Fluchtpunkt(e) der  $y$ -Achse: die Schnittpunkte der Horizonte



## Das Bild einer Geraden:

Verbindet man eine Gerade mit dem Zentrum  $Z$ , so erhält man eine Ebene. Diese schneidet man mit dem Bildflächenzylinder, was eine Ellipse ergibt. Diese Ellipse geht bei der Abwicklung in eine Sinuskurve über. Es ergibt sich also als Bild einer Geraden eine halbe Periode einer Sinuskurve.



Gerade parallel  $z$ :

die Projektionsebene ist eine Durchmessersebene des Zylinders, das Bild ist eine lotrechte Gerade.

Gerade parallel  $x$ :

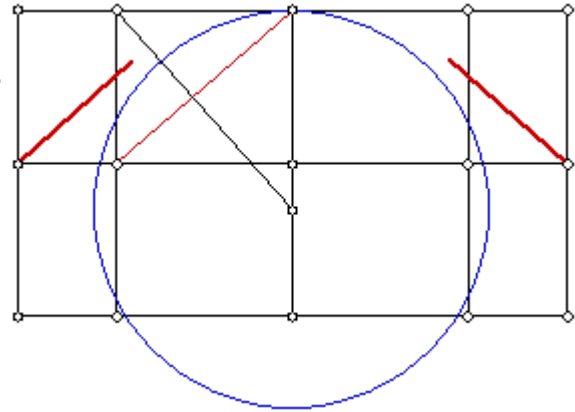
die Projektionsebene ist zweitprojizierend, die Abwicklung ergibt eine halbe Periode einer Sinuskurve, von einem Extremwert zum nächsten, diese liegen daher auf den senkrechten Horizonten liegen, Wendepunkt ist in  $Z''$ .

Gerade parallel  $y$ :  
die Projektionsebene ist eine Pultebene, die Abwicklung ergibt eine halbe Periode einer Sinuskurve von einem Wendepunkt zum nächsten, diese liegen somit auf den senkrechten Horizonten, und der Extremwert über, auf oder unter  $Z''$ .

**Konstruktionen:**

Zur Konstruktion ausreichend sind die Wendetangenten und die Scheitelkrümmungskreise.

Schneidet die Projektionsebene aus dem Zylinder (Radius  $r$ ) ein Stück mit der Höhe  $2 \cdot h$  heraus, so findet man ohne Schwierigkeiten:  
Gleichung der Kurve vom Typ  $v = h \cdot \sin(u / r)$ , der Anstieg der Wendetangenten ist  $h/r$ , der Krümmungsradius im Scheitel ist  $r^2/h$



# Mercator Projektion

## Heuristische Herleitung der Abbildungsgleichungen

Kugelgleichung:

$$X(u=Länge, v=Breite) = \begin{pmatrix} \cos(u) * \cos(v) \\ \sin(u) * \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

$$X_u = \begin{pmatrix} -\sin(u) * \cos(v) \\ \cos(u) * \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}, X_v = \begin{pmatrix} -\cos(u) * \sin(v) \\ \sin(u) * \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$E = X_u^2 = \cos^2 v, F = X_u X_v = 0, G = X_v^2 = 1, W^2 = E * G - F^2$$

In der Nähe eines Punktes läßt sich die Kugel linear darstellen durch die Tangentialebene  $P = X_u * du + X_v * dv$ ,

wobei der erste Vektor die Länge  $\cos v$  hat und der zweite die Länge 1.

Die Kugel soll jetzt durch eine Abbildung konform auf die Ebene abgebildet werden, der

Bildpunkt von P soll sein  $P' = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}$

$P, P + X_u * du, P + X_v * dv$  sind zwei Seiten eines Rechteckes mit den Seitenlängen  $\cos v$  und 1.

Bei einer normalen Zylinderabbildung wird der Äquator längentreu auf die u-Achse abgebildet, die Parallelkreise sind parallel dazu und die Meridiane normal dazu.

Das Rechteck wird nun abgebildet auf ein (echtes) Rechteck mit den Seiten  $du$  und  $dv$ , beides mit der Länge 1, also ein Quadrat. Dabei wurde die Basisseite von  $\cos v$  auf 1 gestreckt, also

mit dem Faktor  $\frac{1}{\cos v}$

Soll die Abbildung konform sein, müssen die beiden Rechtecke ähnlich sein, es muss also auch die andere Seite gestreckt werden.

Die berührende Affinität wird also bewirkt durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$f_u = 1, f_v = 0, g_u = 0, g_v = \frac{1}{\cos v}$$

Durch Integration ergibt sich

$$f(u, v) = u, g(u, v) = \ln\left(\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Die Abbildungsgleichungen sind daher:

$$x = u, y = \ln\left(\tan\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

# Die flächentreue Zylinderabbildung der Kugel (Archimedes)

Geometrisch:

die Kugel wird auf einen längs des Äquator berührenden Zylinder projiziert, die Projektionsstrahlen gehören dabei einem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennpunkten N-Pol-S-Pol bzw. der Ferngerade der Äquatorebene.

Wegen der Formel für die Oberfläche der Kugelzone  $O=2\pi rh$  ist diese Abbildung flächentreu.

Herleitung mit Hilfe der berührenden Affinität:

Man kann die berührende Affinität auch so bestimmen, dass die Abbildung flächentreu wird, dazu verändert man die Matrix von oben passend auf:

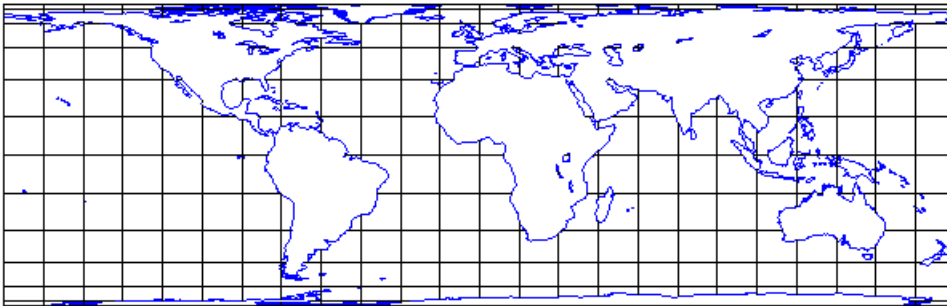
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\cos v} \end{pmatrix}$$

Die Determinante gibt den Flächeninhalt des kleinen Rechteckes an. Soll dieser gleich sein dem Flächeninhalt des entsprechenden Rechteckes auf der Kugel, so muss sein:

$$\frac{k}{\cos v} = \cos v, \text{ also } k = \cos^2 v \text{ und die Abbildungsmatrix ist dann}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} \text{ und durch Integration ergeben sich die Abbildungsgleichungen:}$$

$$f(u,v)=u, \quad g(u,v)=\sin v$$



## Die quadratische Platkarte

ist eine abstandstreue Zylinderprojektion in normaler Lage (abstandstreu ist nicht global gemeint sondern nur auf bestimmten Kurven einer Kurvenschar, hier auf den Meridianen) mit einem Berührkreis am Äquator. Der Äquator selber ist dabei längentreu, äquaturnahe Gebiete werden ebenfalls als relativ winkel- und flächentreu dargestellt.

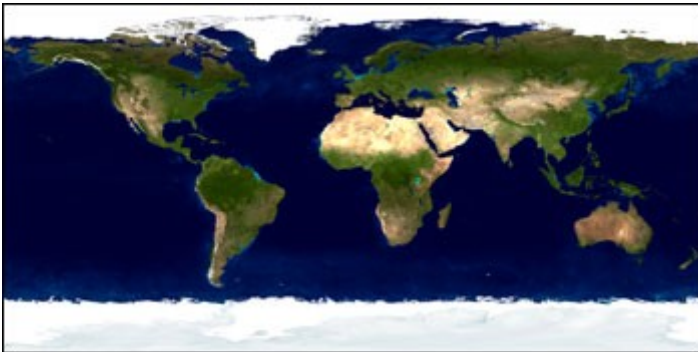
Sie ist eine der ältesten Kartenprojektionen, die älteste Erwähnung stammt von **Marinos von Tyros** (um 100 n. Chr.).[1]

Hauptentwurfsprinzip ist, dass an jeder Stelle auf der Karte der Abstand von jeweils zwei benachbarten Breitengraden und zwei benachbarten Längengraden identisch ist. Das führt ab den mittleren Breiten zu relativ starken Verzerrungen in Ost-West-Richtung, während die Meridiane genauso lang dargestellt werden wie der halbe Äquator – was bei der Annahme der Erde als Kugel korrekt ist. Damit ist die Karte in Nord-Süd-Richtung längentreu.

Die Verzerrung der Breiten nimmt zu den Polen hin mit dem Faktor  $\frac{1}{\cos Br}$  zu.

Sie fand in der Nautik in frühen Seekarten, wo sie zu Problemen führte: die Nautiker waren der Meinung, das Bild einer Orthodrome der Kugel sei eine Gerade, was naturgemäß zu groben Differenzen zwischen Karte und Realität führte. Vermutlich war der portugiesische Astronom und Mathematiker Pedro Nunes (1502–1578) der Erste, der sich mit den aus ihr folgenden Verzerrungen und deren Einfluss auf die Navigation befasste.

Eine besondere Bedeutung kommt ihr heute in den modernen Geoinformationssystemen zu: bekanntester äquirektangularer Datensatz ist die Blue Marble: Cloudless Earth der NASA





# Wie erfand Mercator den Mercator Entwurf?

Die Frage ist insofern berechtigt als es zu seiner Zeit keines der für die exakte Darstellung erforderlichen mathematischen Werkzeuge gab: die trigonometrischen Funktionen, der Logarithmus, Differential- und Integralrechnung waren alle noch längst nicht erfunden bzw. in kaum brauchbarem Zustand.

In heutigen Begriffen formuliert verwendete er einfach die berührenden Affinitäten, d.h. er überzog die Kugel mit Rechtecken (hier im Modell in Breitenabständen von  $10^\circ$  beginnend bei  $-5^\circ$ ), die dann, um die kleiner werdende Basis auf den Breitenkreisen zu kompensieren jeweils mit dem Faktor  $1/\cos(Br)$  vergrößert werden. Das bewirkt dann eben, dass die berührende Affinität eine Ähnlichkeit wird und die Karte konform wird.

Konkret:

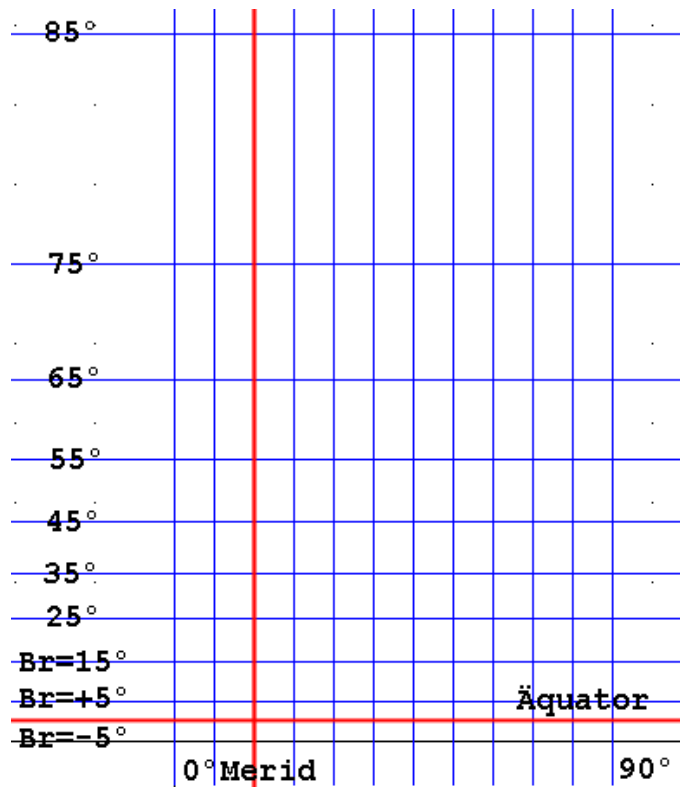
Das erste Rechteck reicht von  $Br_{\text{unten}}=-5^\circ$  bis  $Br_{\text{oben}}=5^\circ$ , es wird mit dem Faktor  $1/\cos 0^\circ$  gestreckt (also gar nicht).

Das zweite Rechteck reicht von  $Br_{\text{unten}}=5^\circ$  bis  $Br_{\text{oben}}=15^\circ$ , es wird mit dem Faktor  $1/\cos 10^\circ$  gestreckt.

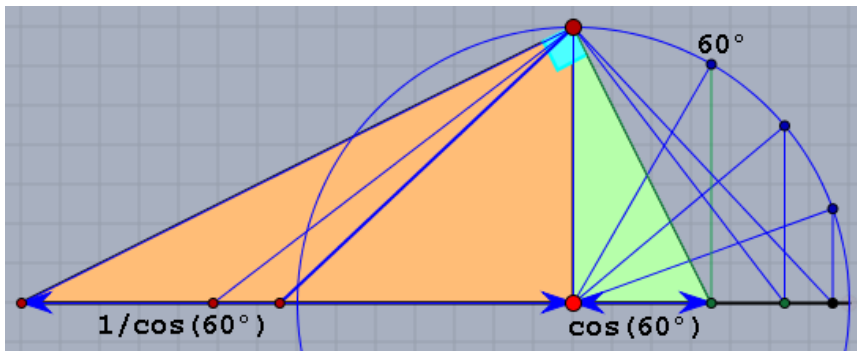
Das dritte Rechteck reicht von  $Br_{\text{unten}}=15^\circ$  bis  $Br_{\text{oben}}=25^\circ$ , es wird mit dem Faktor  $1/\cos 20^\circ$  gestreckt usw.

Die Rechtecke haben demnach die Höhen:

$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
1	1.015	1.064	1.154	1.305	1.555	2	2.923	5.758



Heute würde man die Werte so konstruieren:



Vergleich der Breiten:

- mit der „richtigen“ Formel  $u=Lg, v=\ln\left(\tan\left(45^\circ+\frac{Br}{2}\right)\right)$  gerechnet, in Zeile 2
- und mit den aufeinandergestapelten berührenden Affinitäten (um den Beginn bei  $-5^\circ$  und die 5er-Werte zu kompensieren, muss überall 1 subtrahiert werden, und um die Einheit 1 auf  $10^\circ=\frac{\pi}{18}$  zu bringen, muss mit ebendiesem Wert multipliziert werden.
- Man sieht eine sehr gute Übereinstimmung in Breiten bis  $30^\circ$  und eine gute bis hinauf zu  $60^\circ$ ; höhere Breiten wurden damals ohnehin nicht befahren, und mit diesem Ergebnis konnte man ruhig auf die Erfindung der Differential- und Integralrechnung warten...

$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
0	0.1754	0.3563	0.5493	0.7629	1.010	1.316	1.735	2.436
0	0.1772	0.3629	0.5644	0.7923	1.063	1.412	1.923	2.928

quibus consideratis gradus latitudinum versus utrumque polum paulatim auximus pro incremento parallelorum supra rationem quam habent ad aequinoctialem

Da wir dies bedacht haben, haben wir die Breitengrade zu beiden Polen hin allmählich vergrößert im Verhältnis zum Anwachsen der Breitenparallelen über das Maß hinaus, welches sie zum Äquator haben

# Die transversale Mercatorprojektion –

Der (in Gedanken) zwischengeschaltete Zylinder berührt die Kugel längs eines Meridiankreises (z.B. 0°-Meridian), hat also passend zur obigen Kugelgleichung die Richtung  $y$ , auf den die Kugel zunächst zwischen-abgebildet wird. Der Zylinder wird dann längs der Erzeugenden  $x=-1$ ,  $z=0$  aufgeschnitten und in die Ebene  $x=1$  ausgebreitet.

Im Prinzip sind wieder die Formeln für die normale Lage anzuwenden, allerdings müssen die Koordinaten der Kugelpunkte  $P(Lg=u, Br=v)$  auf ein neues Koordinatensystem umgerechnet werden, für das der 0°-Meridian die Rolle des Äquators übernimmt und die beiden Schnittpunkte der Zylinderachse mit der Kugel zu N- und S-Pol werden.

Dazu ist das (gegenüber  $P$ ) rechtsseitige sphärische Dreieck  $P - N\text{-Pol(alt)} - N\text{-Pol(neu)}$  aufzulösen.

Ergebnis:

$$\sin(Br\text{-neu}) = \cos(v) \cdot \sin(u)$$

$$\tan(Lg\text{-neu}) = \tan(v) / \cos(u)$$

Mit  $Lg\text{-neu}$  und  $Br\text{-neu}$  verfährt man wie mit  $Lg$  und  $Br$  bei der normalen Lage. Wenn man dann diese beiden wieder eliminiert zugunsten von  $Lg$  und  $Br$ , so ergibt sich:

$$X(\text{Hochwert}) = \arctan \frac{\tan v}{\cos u}, Y(\text{Rechtswert}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u \cdot \cos v}{1 - \sin u \cdot \cos v}$$

<http://losolmoshistoria4.blogspot.co.at/2013/10/sistemas-de-proyeccion-cartograficos.html>

## Eigenschaften der Abbildung:

- Die Koordinate „nach oben“ ist  $X$  (=Hochwert), die nach rechts  $Y$  (=Rechtswert).
- Das Bild der ganzen Kugel ist ein Parallelstreifen zwischen den Geraden  $X = \pm \pi$
- Die Punkte mit  $Lg = \pm 90^\circ$ ,  $Br = 0^\circ$  werden auf die Fernpunkte der  $Y$ -Achse abgebildet
- sie ist konform (winkeltreu), die berührende Affinität ist überall eine Ähnlichkeit
- isometrisch längs des gesamten 0°-Meridians
- Nordpol  $\rightarrow (0, \pi/2)$ , Südpol  $\rightarrow (0, -\pi/2)$
- 0°-Meridian  $\rightarrow$  Gerade  $x=0$ , 180°-Meridian  $\rightarrow$  Gerade  $y = \pm \pi$
- 90°-Meridian  $\rightarrow$  Gerade  $y = \pi/2$ , -90°-Meridian  $\rightarrow y = -\pi/2$
- Äquator  $\rightarrow$  Gerade  $y=0$
- Die Bilder der Meridiane sind Sinus-Kurven-artig durch N- und S-Pol, die der Breitenkreise ellipsenartig um N- und S-Pol
- Die  $X$ -Koordinate eines Punktes ist der Abstand zum Äquator

# Gauss-Krüger Abbildung – UMT-System

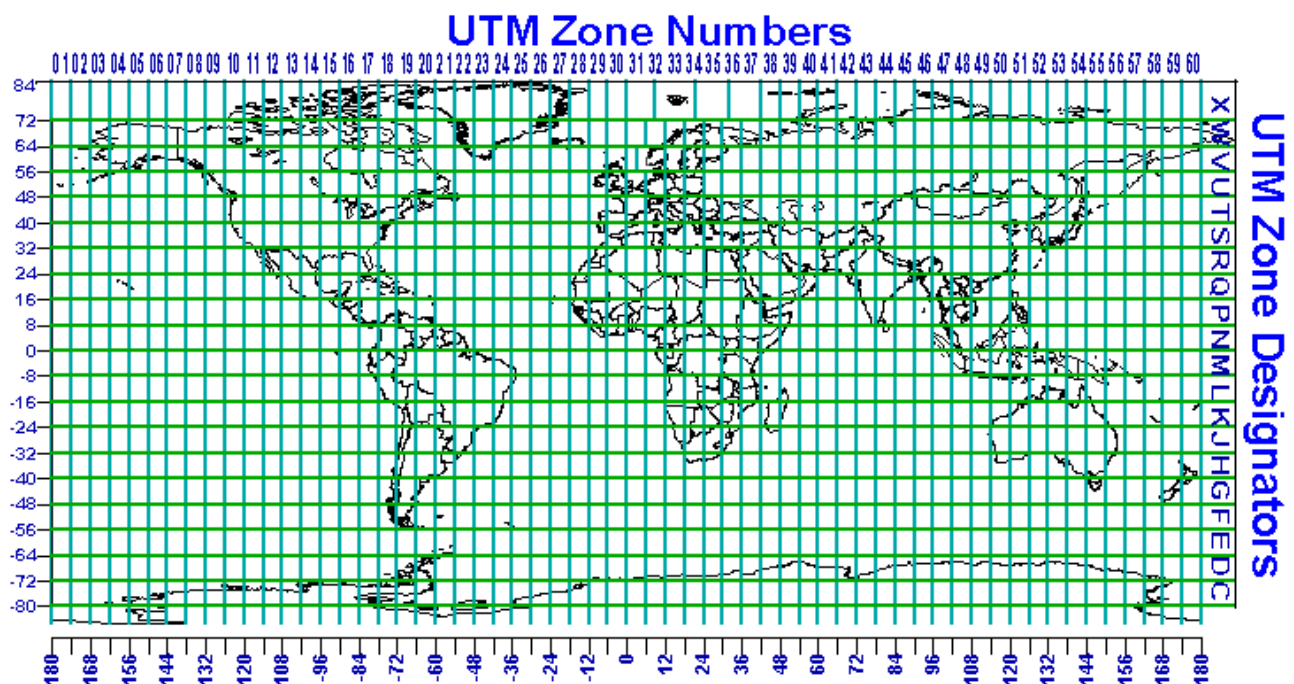
Die Erde wird in 3° breite Meridianstreifen aufgeteilt. Die Mittelmeridiane liegen genau 3° auseinander, die Meridiane 0°, 3°, 6° usw. definieren jeweils einen Streifen; sie werden durchnummeriert von Lg=180° mit den Kennziffer 0, 1, 2...

Um ein größeres Gebiet zu kartieren, werden hinreichend viele 3°-Streifen vorgesehen und jeder für sich einer transversalen Mercator Abbildung unterzogen mit dem jeweiligen Mittelmeridian als Berührkreis mit dem Zylinder.

Um die Koordinaten eines Punktes innerhalb eines Meridianstreifens zu bekommen liest man die X- und Y-Werte wie in einem kartesischen Koordinatensystem ab also parallel zu den Achsen und nicht zu den jetzt bogenförmige verlaufenden Linien der Längen- und Breitengrade.

Beide werden in Metern angegeben: der X-Wert gibt die Entfernung zum Äquator und der Y-Wert die Entfernung zum Mittelmeridian an. Um negative Werte bei den Y-Werten zu vermeiden werden diesem Wert immer 500.000 m hinzu addiert.

- Für das UTM-System wird die Erde von West nach Ost in 60 Zonen in Streifen eingeteilt, wobei jeder Streifen 6 Längengrade umfasst. Die Zonen werden von West nach Ost nummeriert. Man beginnt im Pazifik westlich von Amerika an der Datumgrenze (bei Lg=180° mit Ausbuchtungen) mit Zone 1.
- Breitenzonen: jede UTM Längen-Zone ist von Süd nach Nord in 20 Breiten-Zonen (Zonenfelder) zu je 8° unterteilt.
- Easting bzw. der Ostwert bezeichnet den Abstand des Punktes von der angegebenen Breitenzone in Metern. (+500.000m bzw. 500km, um negative Werte zu vermeiden)
- Northing bzw. der Hochwert bezeichnet den Abstand des Punktes vom Äquator in Metern.



<http://www.okono.com/coordinates.html>

## Beispiel:

Südturm des Stephansdomes in Wien

<http://www.deine-berge.de/Rechner/Koordinaten/Dezimal/48.207576,16.371458>

- Zu sehen sind einmal geographische Länge und Breite in verschiedenen Formaten.
- Der Turm liegt in der Längenzonenzone 33 (von 12° bis 18° Länge) und der Breite nach in der Zone U
- In einer Entfernung von 5 340 360m (5340km 360m) vom Äquator
- In einer Entfernung von 602 012m-500 000m = 102 012m (102km 012m) von seiner Breitenzone entfernt.

Breitengrad / Latitude / Nord		Längengrad / Longitude / Ost	
<b>Suche nach Adresse, Ort oder POI</b>			
<input type="text" value="Wien-Oesterreich Stephansdom Südturm"/>			<input type="button" value="🔍"/>
<b>Dezimalgrad (WGS84)</b>		N 48.208263 E 16.373089	
Lat: <input type="text" value="48.208263"/>	° (N)	Lon: <input type="text" value="16.373089"/>	° (E) <input type="button" value="🔍"/>
Eingabe / Beispiele: Nord 47.018711°   Ost 12.34256°			
<b>Grad Dezimalminuten (WGS84)</b>		N 48° 12.495780 E 16° 22.385340	
Lat: <input type="text" value="48"/>	° <input type="text" value="12.495780"/>	' (N)	Lon: <input type="text" value="16"/>
			° <input type="text" value="22.385340"/>
			' (E) <input type="button" value="🔍"/>
Eingabe / Beispiel: Nord 47°1.122   Ost 12° 20.553'			
<b>Grad Minuten Dezimalsekunden</b>		N 48° 12' 29.7468 E 16° 22' 23.1204	
Lat: <input type="text" value="48"/>	° <input type="text" value="12"/>	' <input type="text" value="29.7468"/>	" (N)
			Lon: <input type="text" value="16"/>
			° <input type="text" value="22"/>
			' <input type="text" value="23.1204"/>
			" (E) <input type="button" value="🔍"/>
Eingabe / Beispiel: Nord 47° 1' 7.359"   Ost 12° 20' 33.216"			
<b>CH1903</b>			
y: <input type="text"/>	(E)	x: <input type="text"/>	(N) <input type="button" value="🔍"/>
Eingabe / Beispiel: y (Ost) = 783009   x (Nord) = 223568			
<b>UTM-Koordinaten (WGS84)</b>		33U 602012 5340360	
Z: <input type="text" value="33U"/>	E: <input type="text" value="602012"/>	N: <input type="text" value="5340360"/>	<input type="button" value="🔍"/>
Eingabe / Beispiel: Zone 32U   Ostwert 691831   Nordwert 5337164			

